Lösungen zum Arbeitsblatt: Integrationsmethoden

1 $\int_1^2 x \cdot \ln x \mathrm{d}x = 0{,}636294261 \text{ FE?}$

$g(x) = \ln x \quad f(x) = x$

$g'(x) = 1/x \quad F(x) = x^2/2$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 0{,}636294361$$

2 $n = 3$: $\Delta x = \frac{b-a}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

Stelle	Funktionswert
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 4/3$	0,383576096
$x_2 = 5/3$	0,851376039
$x_3 = 2$	---

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)\right) = \frac{1}{3} \cdot 1{,}234952135 = 0{,}411650712 \text{ FE}$$

$n = 4$: $\Delta x = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

Stelle	Funktionswert
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 5/4$	0,278929439
$x_2 = 3/2$	0,608197662
$x_3 = 7/4$	0,979327629
$x_4 = 2$	---

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{4} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = 0{,}25 \cdot 1{,}86645473 = 0{,}466613683 \text{ FE}$$

$n = 5$: $\Delta x = \frac{b-a}{5} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}$

Stelle	Funktionswert
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 6/5$	0,218785868
$x_2 = 7/5$	0,471061131
$x_3 = 8/5$	0,752005807
$x_4 = 9/5$	1,058015997
$x_5 = 2$	---

$$\int_1^2 x \cdot \ln x dx \approx \frac{1}{5} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right) = 0{,}2 \cdot 2{,}499869903 = 0{,}4999737606 \text{ FE}$$

3 $\Delta x = \frac{b-a}{3} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

Stelle	Funktionswert
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 4/3$	0,383576096
$x_2 = 5/3$	0,851376039
$x_3 = 2$	1,386294361

$$\int_1^2 x \cdot \ln x dx \approx \frac{1}{6} \cdot \left(f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + f(x_3)\right) = \frac{1}{6} \cdot 3{,}856198631 = 0{,}642699772 \text{ FE}$$

Je größer die Anzahl der verwendeten Rechtecke, desto genauer nähert sich der Wert der Summe an den tatsächlichen Wert des analytischen Integrals an.

4 $\Delta x = \frac{b-a}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}$

Stelle	Funktionswert
$x_0 = 1$	0
$x_1 = 7/6$	0,17984246
$x_2 = 4/3$	0,383576097
$x_3 = 3/2$	0,608197662
$x_4 = 5/3$	0,85137604
$x_5 = 11/6$	1,111248973
$x_6 = 2$	1,386294361

$$\int_1^2 x \cdot \ln x dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 2 \cdot f(x_4) + 4 \cdot f(x_5) + f(x_6)\right) =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left(0 + 0{,}71936984 + 0{,}767152194 + 2{,}432790648 + 1{,}702752079 + 4{,}444995892 + 1{,}386294361\right) =$$

$$= 0{,}636297501 \text{ FE}$$

5

$$P(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 =$$

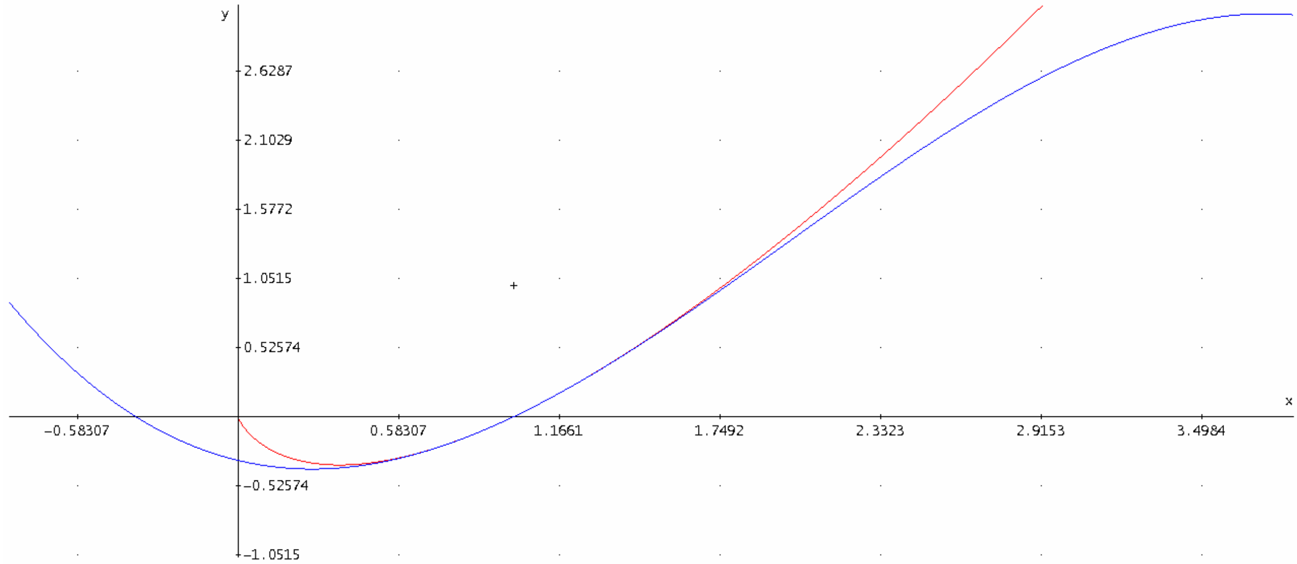
$$= \frac{0}{1} \cdot 1 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 =$$

$$= x - 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \int_1^2 -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} dx = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{7}{24}\right) = 0{,}625 \text{ FE}$$

6



An der Stelle $x = 1$ stimmen die beiden Funktionen exakt überein. Im Integrationsbereich [1;2] ist die Übereinstimmung sicher genügend genau. Hier muss für jedes gestelltes Problem eine Genauigkeit festgelegt werden. Bei Berechnungen im Meterbereich ist die 7 Nachkommastelle vernachlässigbar, im Mikrometerbereich wohl nicht. Automatisch lässt sich nicht sagen, was wohl *genau* bedeutet. Außerhalb des Integrationsbereiches ist eine Übereinstimmung auf jeden Fall nur mehr bedingt gegeben.